KdV方程式のソリトンの個数について(非線型可積分系の研究の現状と展望)

大滝, 和司

数理解析研究所講究録
第 868 巻 1994 年 192-197

KdV 方程式のソリトンの個数について

東京理科大学理工学部数学教室
大滝 和司 (Kazushi Ohtaki)

Korteweg-de Vries (KdV) 方程式の解に現れるソリトンの数について、初期値に多少の条件を与えて検証する。

§1. 逆散乱法

Gardner [Gar] らにより、KdV 方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

の解は逆散乱法によって得られることが分かっている。まずその解法について説明する。

固有方程式

$$\begin{aligned} L\psi(x,t) &= \lambda\psi(x,t) \qquad (t \geq 0\,,\ -\infty < x < \infty) \\ \text{ただし}\qquad L &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t) \end{aligned} \tag{2}$$

を考える。 (1) は、(2) の operator L, および適当な x の線型 operator M を用いて、

$$L_t = ML - LM \tag{3}$$

と書ける。このとき

$$\lambda_t = 0 \tag{4}$$

および

$$\psi_t = M\psi \qquad (t > 0) \tag{5}$$

となり、$\psi(x,t)$ の時間発展方程式が得られる。

そこで、まず (1) の初期値をポテンシャルとして (2) に代入して解く。すなわち

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(\,x\,,\,t{=}0\,)$$

とおいて $\psi(x,t=0)$ を求める。このとき適当な解が存在するために、Faddeev の条件 [Fad]

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|+|x|^2)\,|u|\,dx\;<\;\infty \tag{6}$$

が成り立つものとする。

散乱データの時間発展 $\psi(x,t)$ は (5) により決定される。この時刻 t での散乱データを用いて、Gel'fand-Levitan 方程式 [Gel]

$$K(x,z;t)+F(x+z;t)+\int_{x}^{\infty}K(x,y;t)F(y+z;t)dy\;=\;0 \tag{7}$$

を解く（この式は Marchenko 方程式ともいう [Mar]）。$F(X,t)$ は散乱データにより決まる関数である。これにより、(2) の時刻 t でのポテンシャルは、(7) のカーネル $K(x,z;t)$ を用いて

$$u(x,t)=-2\,\frac{d}{dx}K(x,x;t) \tag{8}$$

と表される。これが (1) の解である。

KdV 方程式 (1) に適当な初期値を与えると、解にはソリトンが現れる。ソリトンの数は、解の漸近形を調べれば見えてくる。さらに逆散乱法による解法の過程から、ソリトンには散乱問題 (2) の定数離散固有値がちょうど 1 対 1 に対応していることがわかる。そこで、ソリトンという言葉には厳密な定義というものはなく、多少曖昧なところがあるので、ここでは Drazin, Johnson [Drz] の定義を採用して、次のように "定義" する。

Definition. ソリトンは非線型発展方程式の $t\to\pm\infty$ での解の構成要素で、対応する散乱問題の定数離散固有値に 1 対 1 に対応する。

この "定義" により、(1) の解に現れるソリトンの数は、散乱問題 (2) にポテンシャルとして (1) の初期値 $u(x,0)$ を代入したときの離散固有値の数を数えればよい。これは (4) により固有値が時間発展しないことから、$t=0$ のときの問題を考えれば十分だからである。

§2. Upper bound の例

初期値ポテンシャル $u(x,0)\equiv V(x)$ を与えたときに (2) が解ける例は少なく、従って離散固有値の数も正確には分からない場合が多い。このようなときは $V(x)$ を使った不等式により、上限あるいは下限で評価される。

$0 \leq x < \infty$ での固有値問題

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) \;=\; \lambda\,\psi(x) \tag{9}$$

の離散固有値の数 N について、Bargmann [Bag] は

$$N \leq \int_0^\infty x\,|V_-(x)|\,dx \tag{10}$$

とした。ただし

$$V_-(x) = \begin{cases} V(x) & (V < 0) \\ 0 & (V \geq 0) \end{cases}$$

である。

H.Segur [Seg] は、(9) を $-\infty < x < \infty$ での固有値問題に拡張して、

$$N \leq 1 + \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,|V_-(x)|\,dx \tag{11}$$

と評価した。

N.Setô [Set] は (10) をさらに改良し、任意次元ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ についての上限を示した。それによれば、1次元の対称ポテンシャル $V(r)$ では

$$N = N_1^0 + N_1^1$$

ただし

$$\begin{aligned} N_1^0 \;&\leq 1 \;+\; \frac{\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty |r-r'|\,|V_-(r')|\,|V_-(r)|\,dr'dr}{\int_0^\infty |V_-(r)|\,dr} \\ N_1^1 \;&\leq\; \int_0^\infty r\,|V_-(r)|\,dr \end{aligned} \tag{12}$$

と評価している。N_1^0, N_1^1 はそれぞれ even、odd となる固有関数をもつ固有値の数である。

(10), (11), (12) は Bargmann type と呼ばれる bound で、$-\infty < x < \infty$ での問題では、今のところ (12) が固有値の数の上限を表す最も良い bound と思われる。しかしポテンシャルが強くなっていくにつれて、各 bound の漸近的なふるまいはあまり良いとはいえなくなる。ポテンシャルを

$$V(x) = g\tilde{V}(x) \qquad g:\text{定数} \tag{13}$$

とおいて $g\to\infty$ とすると、各 bound は g^1 の order でふるまう。

§3. 新しい bound の考察

ポテンシャルに多少条件を加えて、漸近的にもっと良いふるまいをする bound を見つけてみようと思う。

Calogero [Cal] は、$0 \le x < \infty$ の変域で $V(x)$ に条件を与えて次の評価式を示した。

$$N \le \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |V(x)|^{\frac{1}{2}}\,dx \tag{14}$$

$$\text{ただし} \qquad V(x) \le 0, \quad V'(x) \ge 0.$$

この bound のポテンシャルを (13) のようにおいたときの漸近的なふるまいは、$g^{\frac{1}{2}}$ の order である。これを $-\infty < x < \infty$ に拡張するために、まずポテンシャル $V(x)$ の条件を次のように定める。

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad V(x) < 0 \\ &\text{(ii)} \quad V'(x) \ge 0 \qquad (x \ge 0) \\ &\text{(iii)} \quad V(-x) = V(x) \end{aligned} \tag{15}$$

Sturm theorem [Lev] により、離散固有値の数は、固有関数のゼロ点の数を数えることによって得られる。固有値問題 (9) は、Faddeev の条件 (6) が成立しているときには有限個の負の離散固有値をもつ。またその数の上限は、(9) で $\lambda = 0$ とおいた初期値問題

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\,\phi = 0 \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{16}$$

の解 $\phi(x)$ のゼロ点の数で表される。

また (15) の iii) の条件より、(9) の固有関数は odd または even のどちらかとなる。従って離散固有値の数 N は、半区間 $0 \le x < \infty$ での初期値問題 (16) で、初期値を

$$\phi_0(0) = 1 \quad , \quad \phi_0'(0) = 0 \tag{17}$$

とおいたときの解 $\phi_0(x)$ のゼロ点の数 N_0 と、

$$\phi_1(0) = 0 \quad , \quad \phi_1'(0) = 1 \tag{18}$$

とおいたときの解 $\phi_1(x)$ のゼロ点の数 N_1 の和で表される。

odd solution $\phi_1(x)$ については Calogero bound (14) がそのまま使えるので、

$$N_1 \leq \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |V(x)|^{\frac{1}{2}}\, dx. \tag{19}$$

even solution $\phi_0(x)$ については、Interlacing theorem [Hil] が成り立つ。すなわち、2 階微分方程式 (16) の 2 つの線型独立な解 $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ のゼロ点は交互に現れる。よってゼロ点の数は、

$$\begin{aligned} N_0 &\leq N_1 + 1 \\ &\leq 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |V(x)|^{\frac{1}{2}}\, dx. \end{aligned} \tag{20}$$

以上より、離散固有値の数、すなわちソリトンの数を表す新しい bound

$$N \leq 1 + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty |V(x)|^{\frac{1}{2}}\, dx \tag{21}$$

を得た。

この bound のポテンシャルを (13) のように表したときの漸近的なふるまいは $g^{\frac{1}{2}}$ の order である。故に、ポテンシャルに多少の条件はつくものの、Bargmann type より漸近的に良いふるまいをする bound をつくることができた。

§4. 具体例

最後に (9) が解けるポテンシャルの例をあげ、数値計算により Segur's bound (11)、Setô's bound (12) 及び新しい bound (21) を比較検討する。

Example 1.

$$V(x) = -V_0\,\mathrm{sech}^2 x \qquad (V_0 > 0)$$

これは $V_0 = N(N+1)$ (N: 正整数) とおけるとき、(9) は Legendre 方程式に変形できることが知られており、N 個の離散固有値をもつ。

V_0	2	6	12	20	30	upper bound
真値	1	2	3	4	5	N
Segur's bound	3.8	9.3	17.6	28.7	42.6	$1 + 2V_0 \log 2$
Setô's bound	3.0	7.0	13.0	21.0	31.0	$1 + V_0$
new bound	3.8	5.9	7.9	9.9	12.0	$1 + 2\sqrt{V_0}$

Example 2.

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & (|x| \le a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \qquad (V_0 > 0, a > 0).$$

これは井戸型ポテンシャルと呼ばれ、

$$\left[\frac{2}{\pi} \sqrt{V_0 a^2} \right] = N - 1 \qquad [\,] \cdots \text{Gauss' symbol}$$

のとき N 個の離散固有値をもつ。

$\sqrt{V_0 a^2}$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{9}{4}\pi$	upper bound
真値	1	2	3	4	5	N
Segur's bound	1.6	6.6	16.4	31.2	51.0	$1 + V_0 a^2$
Setô's bound	1.4	4.2	10.0	18.6	30.1	$1 + \frac{7}{12} V_0 a^2$
new bound	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	$1 + \frac{4}{\pi}\sqrt{V_0 a^2}$

References

[Bag] V.Bargmann, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **38** (1952) 961.
[Cal] F.Calogero, *Comm. Math. Phys.* **1** (1965) 80.
[Drz] P.G.Drazin and R.S.Johnson, *Solitons : an introduction* . (Cambridge Univ. Press 1989)
[Fad] L.D.Faddeev, *Sov. Phys. Doklady* **3** (1958) 747.
[Gar] C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruscal and R.M.Miura, *Phys. Rev. Letters* **19** (1967) 1095.
[Gel] I.M.Gel'fand and B.M.Levitan, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **15** (1951) 309. (English translation : *Am. Math. Soc. Translations* **1** 253)
[Hil] E.Hille, *Lectures on Ordinary Differential Equations* . (Addison-wesley, Reading, MA 1969)
[Lev] B.M.Levitan and I.S.Sargsjan, *Sturm-Liouville and Dirac Operators* . (Kluwer Academic Publishers, M.I.A. 1991)
[Mar] V.A.Marchenko, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **104** (1955) 695.
[Seg] H.Segur, *J. Fluid Mech.* **59** (1973) 721.
[Set] N.Setô, *Publ. RIMS* **9** (1974) 429.